$(\mathbb{K}, +, \cdot)$: campo

prodotto definito positivo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- G/S
  - a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \neq 0 \quad \forall \bar{v} \neq 0$
  - b) $\bar{v} \cdot \bar{v} \in \square_{\mathbb{K}}$ ↑ quadrato

$\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

Se c'è solo (a) si può sempre ortogonalizzare ma non è detto che si può normalizzare i vettori.

Matrice è ortogonale se $A \in GL(n, \mathbb{K})$ e $A^{-1} = {}^{T}A$

oss: Se $A^{-1} = {}^{T}A \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$

$$\det({}^{T}A\,A) = \det({}^{T}A)\det(A) =$$

$$= \det(A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1$$

$$GO_n(\mathbb{K}) := \{ A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid {}^tA = A^{-1} \}.$$

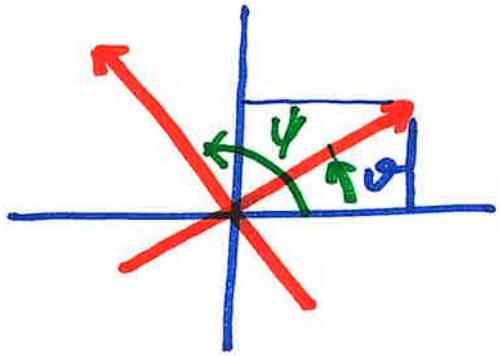
$$SO_n(\mathbb{K}) = \{ A \in GO_n(\mathbb{K}) : \det(A) = +1 \}.$$

sono gruppi di matrici.

$SO_2(\mathbb{R}) = ?$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2+b^2=1 \qquad ac+bd=0$$
$$c^2+d^2=1 \qquad ca+db=0$$
$$ad-bc=1$$



$$a = \cos\vartheta \qquad b = \sin\vartheta$$
$$c = \cos\psi \qquad d = \sin\psi$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta\cos\psi + \sin\vartheta\sin\psi = 0 \\ \cos\vartheta\sin\psi - \sin\vartheta\cos\psi = 1 \end{cases} *$$

$$\psi - \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$* \quad \cos\vartheta\cos\psi + \sin\vartheta\sin\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\psi - \vartheta) = 0 \Rightarrow \boxed{\psi - \vartheta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\cos\vartheta\sin\psi - \sin\vartheta\cos\psi = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\psi - \vartheta) = 1$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

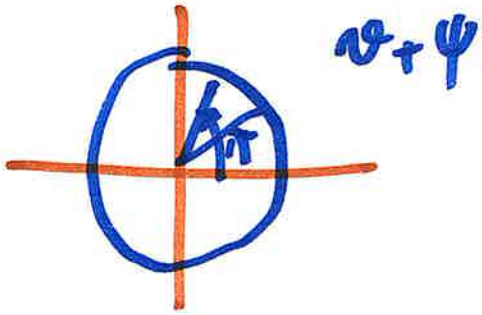
$$GO_2(\mathbb{R}) = \langle SO_2(\mathbb{R}),\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle$$

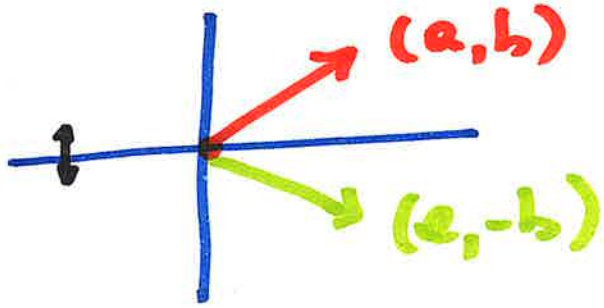
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det : GO_2(\mathbb{R}) \to \{-1,+1\}.$$

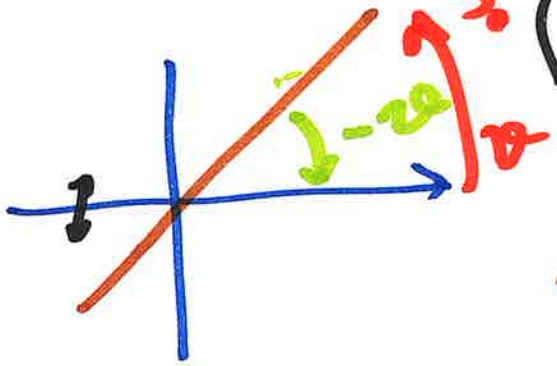
$$\ker(\det) = SO_2(\mathbb{R})$$

$$\frac{GO_2(\mathbb{R})}{SO_2(\mathbb{R})} \cong \{-1,+1\} \cong \mathbb{Z}_2$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ +\sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$ campo complesso. $\quad \mathbb{R}(i) \quad\quad i := \sqrt{-1}$

$$= \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{cases} (a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d) \\ (a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc) \end{cases}$$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ come sp. vettoriale.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo.

$GL_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det(M) \neq 0\}$.

consideriamo in $\mathbb{R}^{2,2}$ il sottospazio vettoriale generato dalle 2 matrici $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed $i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$S = \mathcal{L}(\mathbb{1}, i) := \left\{ a\mathbb{1} + bi = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

<u>oss:</u> sia $M \in \mathcal{L}(\mathbb{1}, i) \Rightarrow$

$$\det(M) = a^2 + b^2 \neq 0 \iff M \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ogni matrice non nulla di $\mathcal{L}(\mathbb{1}, i)$ è invertibile.

2. Sia $M \in \mathcal{L}(\mathbb{1}, i)$, $M \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{\det M} {}^{T}M$$

$\Rightarrow M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{1}, i)$. $\Rightarrow$ ogni elemento non nullo di S è invertibile ed il suo inverso è in S.

3) $\mathbb{1} \cdot i = i\mathbb{1}$

$\Rightarrow (a\mathbb{1} + b \cdot i)(c \cdot \mathbb{1} + d \cdot i) =$

$= (a \cdot \mathbb{1} \cdot c \cdot \mathbb{1} + a \cdot \mathbb{1} \cdot d \cdot i +$

$+ b \cdot i \cdot c \cdot \mathbb{1} + b \cdot i \cdot d \cdot i) =$

$= (ac) \cdot (\mathbb{1} \cdot \mathbb{1}) + (ad)(\mathbb{1} \cdot i) + (bc)(i\mathbb{1}) + (bd)(i \cdot i)$

$= (c\mathbb{1} + di)(a \cdot \mathbb{1} + bi).$

$(S, +, \cdot)$ è un campo!

4) $i \cdot i = \mathbb{1}$

$(S, +, \cdot)$ è un modello di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

fissata la base $(\mathbb{1}, i)$ le comp. delle matrici di S.

sono le componenti del numero complesso z.

$z \in \mathbb{C}$.

$Re(z) = a$ = componente reale $\cdot 1$ di z

$z = a + ib =$

$= a \cdot 1 + b \cdot i$

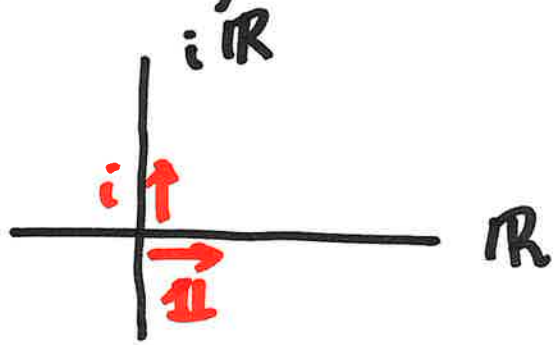
$Im(z) = b$ = componente reale $\cdot i$ di z

$$Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}$$

$$z = a + bi$$

oss: $\{ z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \} \cong \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cong \mathbb{R}$

quindi vedremo $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.



Def: Se $z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ chiamiamo $\bar{z}$ l'elemento $^T z$

$$z = a + ib \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{z} = a - ib \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$z \cdot \bar{z} = (a^2 + b^2)\,\mathbb{1} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\det z}$$

$\bar{z}$: z <u>coniugato</u>.

$$z + \bar{z} = 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

$|z| := \sqrt{\det(z)}$ $\qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ <u>modulo</u> di $\bar{z}$.

$a1 + bi$ $\qquad$ $\|a1+bi\|^2 = a^2+b^2$

$\downarrow$

(a,b)

$(a,b)\cdot(c,d) \to ac+bd$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $(z,w) \to z\cdot w$

prodotto Hermitiano : forma sesquilineare

$$\beta : \begin{cases} V(\mathbb{C}) \times V(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\bar{u}, \bar{v}) \longrightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}. \end{cases}$$

$$\beta(\alpha\bar{u}+\gamma\bar{w},\bar{v}) = \alpha\,\beta(\bar{u},\bar{v}) + \gamma\,\beta(\bar{w},\bar{v})$$

$$\beta(\bar{u},\alpha\bar{v}+\gamma\bar{w}) = \bar{\alpha}\,\beta(\bar{u},\bar{v}) + \bar{\gamma}\,\beta(\bar{u},\bar{w}).$$

$$\beta(\bar{u},\bar{v}) = \overline{\beta(\bar{v},\bar{u})}$$

$$\beta(\bar{u},\bar{u}) = \overline{\beta(\bar{u},\bar{u})} \Rightarrow \mathrm{Im}(\beta(\bar{u},\bar{u})) = 0$$

$$\beta: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n) \longrightarrow x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

$$\beta(x_1 \dots x_n, x_1 \dots x_n) = x_1\bar{x}_1 + \dots x_n\bar{x}_n =$$

$$x_j = a_j + i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2) \geq 0$$

$$\| \bar{x} \| := \sqrt{\beta(\bar{x},\bar{x})} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2)}$$ = norma che ci aspetteremmo su $\mathbb{R}^{2n}$

$\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle$ = $\langle \bar{u} |$ vettore riga $| \bar{v} \rangle$ = trasposto di $\langle \bar{v} |$ coniugato

$$\langle (u_1 \dots u_n) | (v_1 \dots v_n) \rangle = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = u_1\bar{v}_1 + \dots u_n\bar{v}_n$$

$$\langle \underline{u} | \underline{u} \rangle = \|\underline{u}\|^2$$

Campo complesso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

- è un campo
- è come sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ di dim = 2
- è algebricamente chiuso.

Teorema fondamentale dell'algebra.

- Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio nell'indeterminata x di grado $\deg p(x) \geq 1$ a coeff. in $\mathbb{C}$.

Allora $p(x)$ ammette almeno una radice $x_0 \in \mathbb{C}$

cioè $\exists x_0 \in \mathbb{C}: p(x_0) = 0$

CONSEGUENZE:

1) ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ si spezza (si fattorizza) in polinomi in $\mathbb{C}[x]$ di primo grado. $\deg p(x) \geq 1$.

2) ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici contate con la debita molteplicità

oss: la funzione di coniugio $z \to \bar{z} = {}^{r}z$ è un automorfismo di $\mathbb{C}$, cioè $\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b}$

$\overline{(ab)} = {}^{r}(ab) = {}^{r}b\,{}^{r}a = {}^{r}\bar{a}\,{}^{r}b = \bar{a}\bar{b}$

e $a = \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}$.

Sia $\deg p(x) = n$

$\Rightarrow$ per il Teor. fond. dell'algebra $\exists x_0 \in \mathbb{C}$:

$$p(x_0) = 0$$

ma questo per il teorema di Ruffini significa che $p(x) = (x - x_0)\, q(x)$

con $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $\deg q(x) = \deg p(x) - 1$

$\Rightarrow$ per l'ipotesi induttiva $q(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i x - \beta_i)$

$\Rightarrow p(x) = (x - x_0) \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i x - \beta_i)$ è spezzato in fattori lineari.

[Teorema di Ruffini: Sia $\mathbb{K}$ un campo e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{K}$ tale che $p(x_0) = 0 \iff p(x) = (x - x_0) q(x)$

con $q(x) \in \mathbb{K}[x]$.

⌟

3) ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ si fattorizza nel prodotto di polinomi $q_1(x) \dots q_r(x)$ con $\deg q_i(x) \leq 2$

4) se $p(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \overline{p(x)} = \overline{p}(\bar{x}) = p(\bar{x})$ $\forall a \in \mathbb{C}$:
e viceversa se $\forall x \in \mathbb{C}: p(x) = p(\bar{x}) \Rightarrow p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

DIM: 1) Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow$ per il teor. fond. dell'algebra $\exists x_0 \in \mathbb{C}$: $p(x_0) = 0$ se $\deg p(x) \geq 1$.

- Se $\deg p(x) = 1 \Rightarrow \exists x_0 : p(x_0) = 0$ & $p(x)$ è di grado 1.
- Supponiamo la prop. valga $\forall p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg p(x) < n$.

Se $p(x) = (x-x_0)\,q(x) \Rightarrow p(x_0) = 0 \cdot q(x_0) = 0$.

Il viceversa si mostra osservando che eseguendo la divisione con resto di polinomi in $\mathbb{K}[x]$ si ha che $p(x)$ diviso $(x-x_0)$ deve avere resto $=0$ perché se così non fosse il resto sarebbe un "polinomio" r di grado 0 $\Rightarrow p(x) = (x-x_0)\cdot q(x) + r_0$

$\Rightarrow p(x_0) = 0 \cdot q(x_0) + r = r_0 \neq 0$ $\lightning$ $\perp$

2) $p(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow p(x) = a \prod_{i=1}^{n} (x-\beta_i)$ $\quad a \neq 0$

$\deg p(x) = n$

$\Rightarrow \{\beta_1 \dots \beta_n\}$ sono tutte radici di $p(x)$

la molteplicità di β_i è il numero di volte che compare come radice.

4) Se $p(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \overline{p}(x) = p(x)$

ma $\overline{p(x)} = \overline{p}(\bar{x})$ e dunque $\overline{p}(\bar{x}) = p(\bar{x})$

In particolare se x radice di $p(x) \Rightarrow$
$\bar{x}$ radice di $p(x)$.

N.B. Questo vale anche se $p(x) = \alpha q(x)$ con
$\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

che se x_0 è radice $\Rightarrow \bar{x}_0$ è radice.

Se $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $\forall x_0 \in \mathbb{C}: \; p(x_0) = 0 \Rightarrow p(\bar{x}_0) = 0$ (*).

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}: \; p(x) = \alpha \tilde{p}(x)$ con $\tilde{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$

(*) $\Rightarrow$ la fattorizzazione in $\mathbb{C}$ di $p(x)$ è del tipo

$$p(x) = \alpha \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) \prod_{j=1}^{(n-k)/2} (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$$

ove $x_i = \bar{x}_i$ e $z_j \neq \bar{z}_j$ $\alpha \in \mathbb{C}$

$\deg p(x) = n$

cioè $x_1 \dots x_k$ sono radici reali di $p(x)$

$z_1 \dots z_j$ sono radici immaginarie

e dunque $(x - z_j) \neq (x - \bar{z}_j)$.

ma se $p(x)$ è di quella forma oss. che

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = \left(x^2 - \underbrace{(z_j + \bar{z}_j)}_{\| \; 2\mathrm{Re}(z_j)} x + \underbrace{z_j \bar{z}_j}_{\| \; |z_j|}\right)$$

$\in \mathbb{R}[x]$

$$\Rightarrow p(x) = \underbrace{\alpha \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) \prod_{j=1}^{(n-k)/2} \left(x^2 - (z_j + \bar{z}_j)x + z_j \bar{z}_j\right)}_{\in \mathbb{R}[x]}$$

⇒ 3) Un polinomio reale $p(x)$ si dice
reducibile se è prodotto di polinomi reali di grado ≥ 1.

I — Esempi

Es: $p(x) = x^2 + 1$ è riducibile in $\mathbb{C}[x]$ ma
è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ perché: $\forall x \in \mathbb{R}$ $p(x) \neq 0$

• Dire se $p(x) = x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.

Dobbiamo vedere se $p(x)$ ha radici in $\mathbb{Z}_3$:

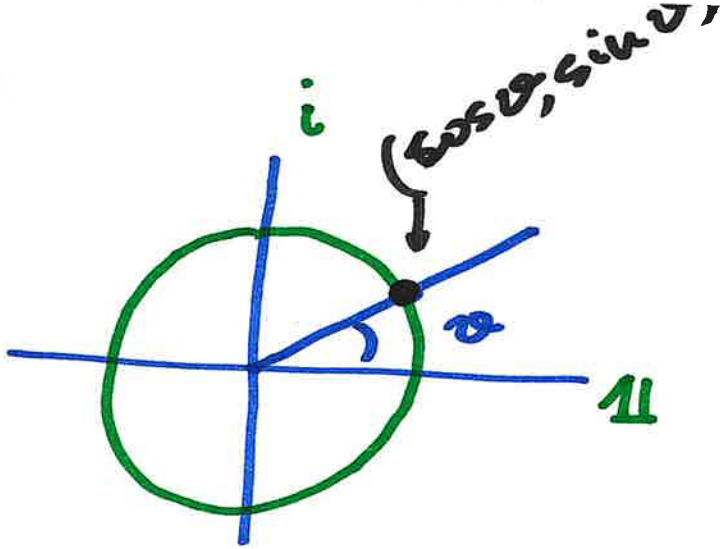
$p(0) = 1 \neq 0$, $p(1) = 2 \neq 0$, $p(2) = 5 = 2 \neq 0$

Quindi $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.

Dire se $p(x) = x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_2[x]$.

$p(0) = 1 \neq 0$, $p(1) = 2 = 0$ quindi $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_2[x]$
perché $p(x) = (x+1)^2$ (prodotto di polinomi di grado ≥ 1)

$e^{i\pi} = -1$



$z = |z| e^{i\vartheta} = e^{\log|z|} e^{i\vartheta}$

$|z| \neq 0$

$\| e^{ix} \| = 1$ le soluzioni dello equazione

$$x^n = 1$$

sono date da $x_j = e^{\frac{2\pi}{n} i j}$

N.B. ogni numero complesso può rappresentarsi in forma polare come $z = |z| \cdot e^{\vartheta i}$

ove $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Cosa è $SO_2(\mathbb{R})$?

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & +\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} = e^{\vartheta i}$$

$$\| $$

$$(\cos\vartheta)\cdot \mathbb{1} + (\sin\vartheta)\cdot i$$

$$SO_2(\mathbb{R}) \cong U(1) = \{ z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1 \} =$$

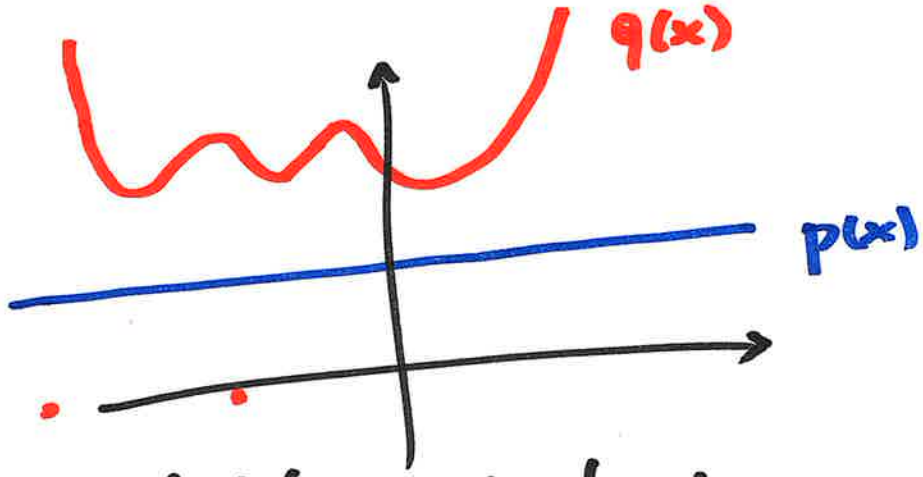
$$= \{ e^{\vartheta i} \mid \vartheta \in \mathbb{R} \}.$$

$$e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = e^{(\alpha+\beta)i}$$

In $\mathbb{R}$ un polinomio può non avere radici.

di grado $d \geq 1$

DALLE RADICI DEL POLINOMIO NON È POSSIBILE RICOSTRUIRLO



In $\mathbb{C}$ un polinomio è determinato (a meno di un coeff. di proporzionalità) dalle sue radici.

Autovalori, Autovettori e Diagonalizzazione.

$V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale.

$f: V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ Lineare.

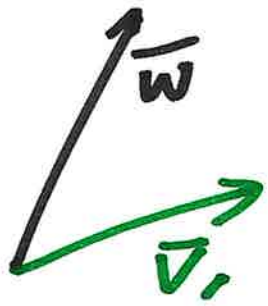
in funzione della scelta di una base di $V(\mathbb{K})$ abbiamo diverse rappresentazioni di f.

1) $\exists$ una base "preferenziale" per f?
2) In che base f si rappresenta nel modo più semplice possibile?

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3$$

$$f(\bar{v}) = w_1\bar{e}_1 + w_2\bar{e}_2 + w_3\bar{e}_3$$

$$w_1 = f_1(v_1, v_2, v_3)$$
$$w_2 = f_2(v_1, v_2, v_3)$$
$$w_3 = f_3(v_1, v_2, v_3)$$



Def: Un vettore $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ con $\bar{v} \neq \underline{0}$ è detto **autovettore** per f se $f(\bar{v}) \in \mathcal{L}(\bar{v})$.

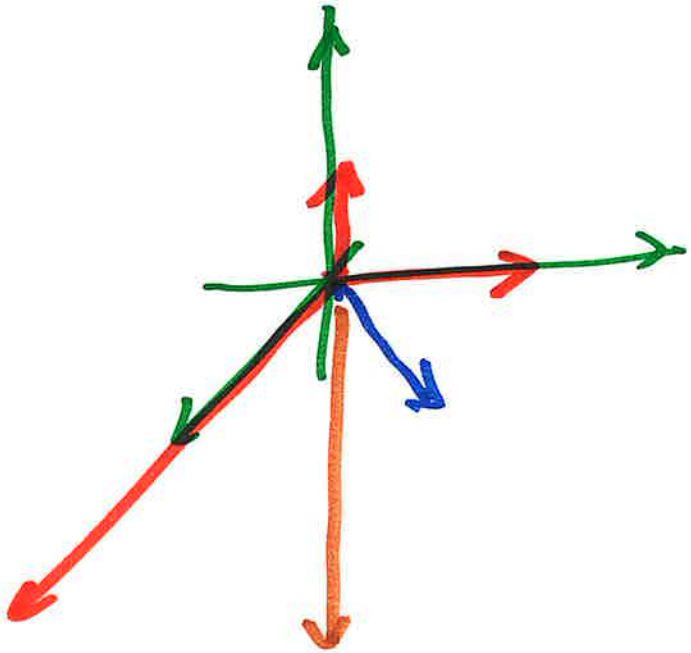
Inoltre $\bar{v}$ è un **autovettore** di **autovalore** λ se $\bar{v} \neq \underline{0}$ e $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$.

oss: Se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n)$ base di autovettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i \quad \forall i \Rightarrow$ la matrice di f

rispetto questa base è diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



$$f(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n) =$$

$$= (\lambda_1 x_2)\bar{e}_1 + \dots + (\lambda_n x_n)\bar{e}_n$$